Solutions d'un système linéaire

En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient directement la description de l'ensemble des solutions.

Rappel : On a toujours

1.
2.
3.

Exemple : Soit

$$S = \begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$$

On a

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right) \sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)}_{\text{ER}}$$

Cette matrice correspond au système

$$S' = \begin{cases} x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -24 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

Ecriture des solutions :

On remarque que

1) $x_5 = 4$ (x_5 fixé !)

2) x_3 et x_4 apparaissent deux fois

3) x_1 et x_2 n'apparaissent qu'une fois

x_1, x_2 et x_5 correspondent aux colonnes pivots.

Interprétation : $\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 3x_4 - 24 \\ x_2 = 2x_3 - 2x_4 - 7 \\ x_5 = \qquad\qquad\quad 4 \end{cases}$

Il n'y a aucune condition sur x_3 et x_4. Ce sont des variables libres.

On trouve p.ex. $(-24, -7, 0, 0, 4)$. (avec $x_3 = x_4 = 0$)

On obtient finalement une infinité de solutions, en fonction de x_3 et x_4, qui sont des paramètres.

L'ensemble des solutions s'écrit

$$S = \{ (\underbrace{2k - 3l - 24}_{x_1}, \underbrace{2k - 2l - 7}_{x_2}, \underbrace{k}_{x_3}, \underbrace{l}_{x_4}, \underbrace{4}_{x_5}) \mid k, l \in \mathbb{R} \}$$

Définition 8 (variables libres et de base)**.**
Les *variables de base* correspondent aux variables des colonnes pivots et les *variables libres* à celles qui ne sont pas des colonnes pivots.

Remarque : les variables de base s'appellent aussi principales ou liées.
les variables libres s'appellent aussi non-principales.

Exemples :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{ est E}$$

x_1, x_2 et x_4 sont de base
x_3 est libre

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ est ER}$$

x_1 est libre
x_2 et x_3 sont de base

Étude des solutions d'un système linéaire à partir de la forme E et ER

Considérons l'exemple suivant : La matrice

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

pivot dans la colonne des termes constants

est la forme échelonnée d'un système linéaire correspondant au système équivalent

$$\mathcal{S}' : \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ \quad\quad -x_2 + x_3 = -2 \\ \quad\quad\quad 0 = 3 \end{cases}$$

impossible !

Donc le système est inconsistant.

On a $S = \emptyset$.

Constat : Le système est inconsistant si la matrice augmentée sous forme échelonnée ou échelonnée-réduite (unique !) possède une ligne du type

$$(0 \ldots\ 0 \mid *) \text{ avec } \underline{* \text{ non-nul}}$$

Dans ce cas, la colonne des termes constants est une colonne pivot et correspond à une éq. du type "$0 = *$" avec $*$ non nul.

Si la dernière colonne de la matrice augmentée n'est pas une colonne pivot, alors toute équation non nulle contient une variable de base avec un coefficient non nul. On a alors deux cas possibles :

Premier cas :

Toutes les variables de base sont complètement déterminées et il n'y a pas de variable libre.

$\Leftrightarrow$ toutes les colonnes de la matrice des coefficients ont un pivot

$\Leftrightarrow$ il y a une unique solution.

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & \cdots & & \vdots \\ 0 & * & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \vdots \end{array}\right)$$

Deuxième cas :
L'une au moins des variables de base s'exprime en fonction d'une ou plusieurs variables libres.

$\Leftrightarrow$ on a au moins une colonne de la matrice des coefficients qui n'est <u>pas</u> une colonne-pivot

$\Leftrightarrow$ il y a une infinité de solutions

Exemple

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & \cdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & * & * & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & \end{array}\right)$$

$\uparrow$
colonne non-pivot,
x_3 est une variable libre

Le raisonnement précédent se résume dans le théorème suivant :

Théorème 2. *Un système d'équations linéaire est consistant* ***si et seulement si*** *la matrice augmentée sous forme échelonnée ou échelonnée-réduite n'a pas de ligne du type*

$$(0 \; 0 \ldots 0 \mid *) \text{ avec } * \text{ non nul.}$$

L'ensemble des solutions d'un système compatible se compose

1. d'une unique solution si on n'a aucune variable libre

2. d'une infinité de solutions si on a au au moins une variable libre.

important Sur moodle, voir un exercice additionnel d'un système $m \times n$, on étudie le nbre de sol. en fonction de m et n ($m > n$, $m = n$, $m < n$)

Définition 9 (système homogène)**.**
Un système est dit *homogène* si tous les termes de droite (b_i) sont nuls. Une solution est dite *triviale* si elle est nulle.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

Remarque: Considérons l'élément nul

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ fois}}) \in \mathbb{R}^n$$

Cet élément est toujours solution d'un syst. homogène.
Cette solution est dite triviale.

$\Rightarrow$ Tous les systèmes homogènes sont consistants.

1.4 Équations vectorielles

Définition 10 (vecteur).
Un *vecteur (vecteur colonne)* est une matrice à une seule colonne

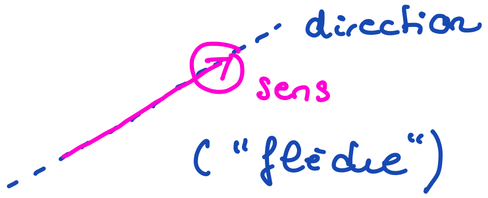
$$\vec{v} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right\}n}_{1}$$

$\vec{v}$ est une matrice de taille $n \times 1$

avec $v_i \in \mathbb{R}$. on appelle les v_i des <u>composantes</u>.

Schéma

on représente les vecteurs par



Définition 11 ($\mathbb{R}^n$). $\rightsquigarrow$ autre manière ! $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n coordonnées)
On définit $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble de tous les vecteurs à n composantes.

On le note $\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \middle| \; v_i \in \mathbb{R}, \; 1 \leq i \leq n \right\}$

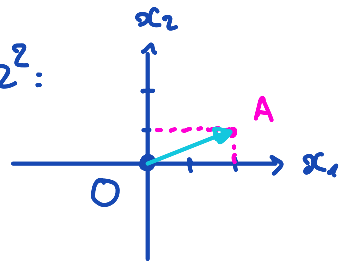
Exemples

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\quad$ ⚠ $\vec{v} \notin \mathbb{R}^3$ $\quad$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\quad$ ⚠ $\vec{w} \notin \mathbb{R}^2$

Remarque on peut établir une correspondance entre les vecteurs à n composantes et les n-tuples de $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^2$:



(repère avec une origine)

A(2, 1) point avec coordonnées

$\updownarrow$

$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ deux manières de voir $\mathbb{R}^2$

<u>Points</u> on fixe un repère
pas d'opérations !

<u>vecteurs</u>
opérations possibles !

On peut voir les vecteurs comme un déplacement

ex : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Si on prend $P(3,4)$, on obtient Q avec $\vec{PQ} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on a $Q(5,5)$.

Définition 12 (égalité entre vecteurs)**.**
Deux vecteurs sont *égaux* si

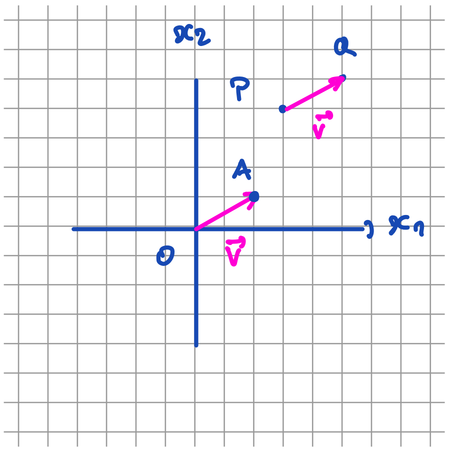
1. ils ont la même taille (même nbre de composantes)

2. les composantes sont égales une à une.

ex : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3}$

Interprétation de $\mathbb{R}^n$

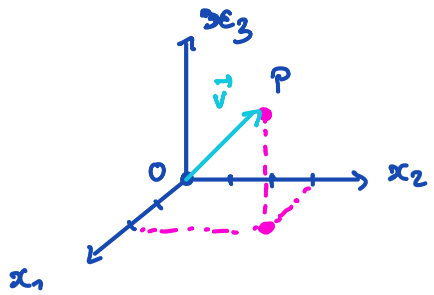
$n=2$



Si $P(p_1, p_2)$
et $Q(q_1, q_2)$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

$n=3$



$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{OP}$

$O(0,0,0)$
$P(2,3,4)$

Opérations dans $\mathbb{R}^n$

Addition

Soient $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. On définit

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

addition "composante par composante"

Multiplication par un scalaire

Soient $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit

$$\lambda\, \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

on multiplie toutes les composantes par le même facteur λ.

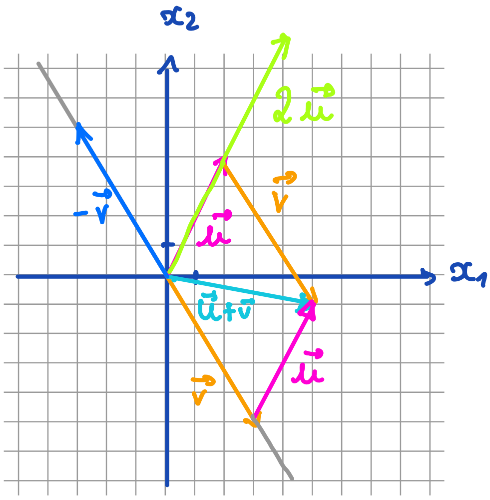
Exemple

dans $\mathbb{R}^2$

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$

$\mu = 2$



$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 4+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mu \cdot \vec{u} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \vec{v} = -1 \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

addition : règle du parallélogramme

on constate que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Propriétés Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

1. $\vec{u} + \vec{v} =$ $\vec{v} + \vec{u}$ (commutativité)

2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} =$ $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativité)

   $2+3+5 = (2+3)+5 = 2+(3+5)$

3. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) =$ $\lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ (distributivité "mixte")

4. $(\lambda + \mu)\vec{u} =$ $\lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$ (")

5. $\lambda(\mu\vec{u}) =$ $(\lambda\mu)\vec{u}$ (asso. "mixte")

6. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ 1 est élément neutre pour la mult. par un scalaire

7. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ est élt. neutre pour l'addition)

8. $\vec{u} + (-1)\vec{u} = (1 + (-1))\vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (vecteur nul)

Exemple

Soient $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{a_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = -2$ $\lambda_3 = 0$ $\lambda_4 = 1$

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3} + \lambda_4 \vec{a_4} =$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 4 + 0 \cdot 7 + 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 + 0 - 1 \\ 2 \cdot 3 - 2 + 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$